2023 年高考押题预测卷 01

文科数学·参考答案

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	B	C	B	A	A	D	D	B	D	A

13．29　　14． 0.4　　15.$[1,11]$　　16.①④

17.（12 分）

【详解】（1）因为 $2\sin A\sin B\cos C=\sin^2 C$，由正弦定理得，$2ab\cos C=c^2$

由余弦定理得，$2ab\cdot\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=c^2$，$a^2+b^2-c^2=c^2$

整理得 $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=2$；（6 分）

（2）因为 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，因为 $c=2$，由（1）可得 $\cos C=\dfrac{2}{ab}$，则 $\sin C=\sqrt{1-\dfrac{4}{a^2b^2}}$.，

又 $2c^2=8=a^2+b^2\geq 2ab$，即 $ab\leq 4$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

于是 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2-4}\leq\dfrac{1}{2}\sqrt{16-4}=\sqrt{3}$

所以 S 的最大值为 $\sqrt{3}$.（12 分）

18．（12 分）

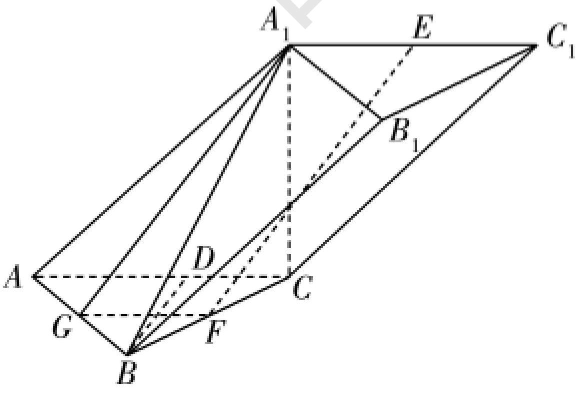
【详解】（1）如图，取 AB 的中点 G，连接 A_1G,GF，

则 $GF//AC,GF=\dfrac{1}{2}AC,A_1E//AC,A_1E=\dfrac{1}{2}AC$，所以 $A_1E//GF,A_1E=GF$，

所以四边形 A_1EFG 为平行四边形，所以 $EF//A_1G$.（3 分）

因为 $EF\not\subset$ 平面 ABB_1A_1，$A_1G\subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $EF//$ 平面 ABB_1A_1 .（6 分）



（2）取 AC 的中点 D，连接 BD,A_1B .

西安正大补习学校

因为$\triangle ABC$是等边三角形，所以$BD\perp AC$.

又平面$AA_1C_1C\perp$平面ABC，且平面$AA_1C_1C\cap$平面$ABC=AC$，

所以$BD\perp$平面AA_1C_1C.

因为$A_1C\subset$平面AA_1C_1C，所以$BD\perp A_1C$.

因为$A_1C\perp BC,BD\cap BC=B$，$BD,BC\subset$平面ABC,

所以$A_1C\perp$平面ABC.

所以$V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times A_1C=2\sqrt{3}$，得$A_1C=2$.（8分）

因为$AC\subset$平面ABC，所以$A_1C\perp AC$.

在Rt$\triangle AA_1C$和Rt$\triangle BA_1C$中，由勾股定理可得$A_1A=A_1B=2\sqrt{2},A_1G\perp AB,A_1G=\sqrt{7}$，

所以$S_{\triangle A_1AB}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}=\sqrt{7}$.

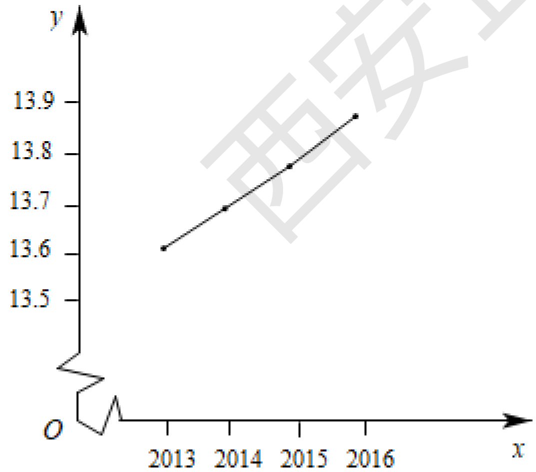
设点C到平面AA_1B的距离为d，

由$V_{C-AA_1B}=V_{A_1-ABC}$，得$\frac{1}{3}\times\sqrt{7}\times d=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 2$，解得$d=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

所以点C到平面ABB_1A_1的距离为$\frac{2\sqrt{21}}{7}$.（12分）

19.（12分）

【详解】(1)如图所示：



（3分）

(2)

不妨选择前两组数据建立一次函数模拟，设模拟方程为$y=kx+t(k\neq 0)$，

令2013年对应x为1，则2014年对应x为2，选取$(1,13.61),(2,13.68)$两点进行模拟，

代入可得$\begin{cases}13.61=k+t\\13.68=2k+t\end{cases}$，

解得 $k=0.07, t=13.54$，所以 $y=0.07x+13.54$，

2017 年，即 $x=5$时，$y=13.89$，

故预测 2017 年中国人口数为13.89亿（选其他数据，计算合理也正确）（6 分）

(3)

①$S=(13.61-b-a)^2+(13.68-b-2a)^2+(13.75-b-3a)^2+(13.83-b-4a)^2$

$=(13.61-b)^2+a^2-2a(13.61-b)+(13.68-b)^2+4a^2-4a(13.68-b)$

$+(13.75-b)^2+9a^2-6a(13.75-b)+(13.83-b)^2+16a^2-8a(13.83-b)$

$=30a^2-2(137.54-10b)a+(4b^2-109.74b+752.7059)$（7 分）

②所以当 $a=-\dfrac{-2(137.54-10b)}{2\times 30}=\dfrac{137.54-10b}{30}$时，$S$ 有最小值，

所以 $a_0=\dfrac{137.54-10b}{30}$，

$S_0=30\times\left(\dfrac{137.54-10b}{30}\right)^2-2(137.54-10b)\times\left(\dfrac{137.54-10b}{30}\right)+(4b^2-109.74b+752.7059)$

$=\dfrac{20b^2-541.4b+3663.9254}{30}$（8 分）

③由②可得当 $b=-\dfrac{-\dfrac{541.4}{30}}{2\times\dfrac{2}{3}}=13.535$时，$S_0$ 有最小值，即 $b_0=13.535$，（9 分）

④当 $b_0=13.535$时，$a_0=\dfrac{137.54-10\times 13.535}{30}=0.073$，（10 分）

⑤$y=0.073x+13.535$，2017 年对应 x=5，代入可得 $y=13.9$，

所以预测 2017 年中国人口数为 13.9 亿.（11 分）

(4)

查阅可得 2017 人口总数为 13.9 亿，比较可得第二种方法算的更准确，误差更小.（12 分）

20.（12 分）

【详解】(1) $\because f'(x)=3x^2+2ax+b$，

由题意得$\begin{cases}f(1)=1+a+b+c=2\\ f'(1)=3+2a+b=4\\ f'(-1)=3-2a+b=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=1\\ b=-1\\ c=1\end{cases}$，

所以 $f(x)=x^3+x^2-x+1$，$f'(x)=3x^2+2x-1$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$或 $x>\dfrac{1}{3}$；令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<\dfrac{1}{3}$；

则 $f(x)$在 $(-\infty,-1),\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$上单调递增，在 $\left(-1,\dfrac{1}{3}\right)$上单调递减，

西安正大补习学校

$\therefore f(x)$在$x=-1$处取到极大值，在$x=\frac{1}{3}$处取到极小值，

故$a=1,b=-1,c=1$符合题意，$f(x)=x^3+x^2-x+1$.（6分）

（2）令$g(x)=0$，则$f(x)=1-m$，

原题意等价于$y=f(x)$与$y=1-m$有三个交点，

由（1）可得：$f(x)$在$(-\infty,-1),\left(\frac{1}{3},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(-1,\frac{1}{3}\right)$上单调递减，

$\therefore f(x)$在$x=-1$处取到极大值$f(-1)=2$，在$x=\frac{1}{3}$处取到极小值$f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{22}{27}$，（10分）

故$\frac{22}{27}<1-m<2$，解得$-1<m<\frac{5}{27}$，

所以m的取值范围为$\left(-1,\frac{5}{27}\right)$.（12分）

21.（12分）

【详解】（1）由题意得，$A_1(-1,0)$，$A_2(1,0)$.

因为D为BC中点，所以$A_1D\perp BC$，即$A_1D\perp A_2C$，

又$PE//A_1D$，所以$PE\perp A_2C$，

又E为A_2C的中点，所以$|PA_2|=|PC|$，

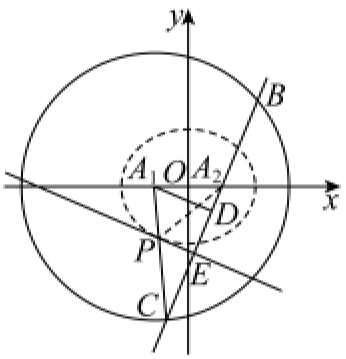
所以$|PA_1|+|PA_2|=|PA_1|+|PC|=|A_1C|=4>|A_1A_2|$，

所以点P的轨迹Γ是以A_1，A_2为焦点的椭圆（左、右顶点除外）.

设$\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(x\neq\pm a)$，其中$a>b>0$，$a^2-b^2=c^2$.

则$2a=4$，$a=2$，$c=1$，$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$.

故$\Gamma:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq\pm2)$.（5分）



西安正大补习学校

（2）解法一：结论③正确.下证：$\triangle QC_1C_2$的面积是定值.

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线l_2的斜率不为 0，（6分）

可设直线$l_2:x=my-1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，且$x_1\neq\pm2$，$x_2\neq\pm2$.

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my-1\end{cases}$，得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

所以$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

所以$2my_1y_2=-3(y_1+y_2)$.（8分）

直线B_1M的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线$B_2N$的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

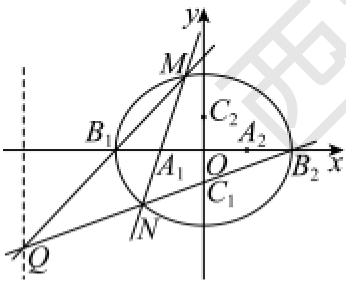
由$\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)\end{cases}$，得$\dfrac{x+2}{x-2}=\dfrac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}$，

$$=\frac{y_2(my_1+1)}{y_1(my_2-3)}=\frac{my_1y_2+y_2}{my_1y_2-3y_1}=\frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+y_2}{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)-3y_1}=\frac{-\frac{3}{2}y_1-\frac{1}{2}y_2}{-\frac{9}{2}y_1-\frac{3}{2}y_2}=\frac{1}{3}$$，（10分）

解得$x=-4$.

故点Q在直线$x=-4$，所以Q到C_1C_2的距离$d=4$，

因此$\triangle QC_1C_2$的面积是定值，为$\dfrac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$.（12分）



解法二：结论③正确.下证：$\triangle QC_1C_2$的面积是定值.

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线l_2的斜率不为 0，（6分）

可设直线$l_2:x=my-1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，且$x_1\neq\pm2$，$x_2\neq\pm2$.

由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=my-1\end{cases}$，得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

所以$y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$，

所以$2my_1y_2=-3(y_1+y_2)$.（8分）

直线B_1M的方程为：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线$B_2N$的方程为：$y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

由$\begin{cases}y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)\\ y=\dfrac{y_2}{x_2-2}(x-2)\end{cases}$，

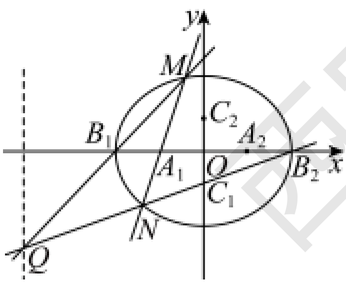
得$x=2\left[\dfrac{y_2(x_1+2)+y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}\right]$

$=2\left[\dfrac{y_2(my_1+1)+y_1(my_2-3)}{y_2(my_1+1)-y_1(my_2-3)}\right]=2\left(\dfrac{2my_1y_2+y_2-3y_1}{y_2+3y_1}\right)$

$=2\left[\dfrac{2my_1y_2+3(y_1+y_2)-2(y_2+3y_1)}{y_2+3y_1}\right]=-4$，（10分）

故点Q在直线$x=-4$，所以Q到C_1C_2的距离$d=4$，

因此$\triangle QC_1C_2$的面积是定值，为$\dfrac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times2\times4=4$.（12分）



解法三：结论③正确.下证：$\triangle QC_1C_2$的面积是定值.

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线l_2的斜率不为0.（6分）

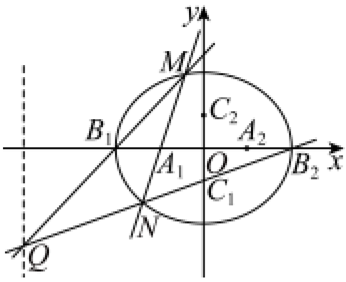
（i）当直线l_2垂直于x轴时，$l_2:x=-1$，由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=-1\end{cases}$，得$\begin{cases}x=-1\\ y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\ y=\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

不妨设$M\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$，$N\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)$，

则直线 B_1M 的方程为：$y=\frac{3}{2}(x+2)$，直线 B_2N 的方程为：$y=\frac{1}{2}(x-2)$，

由 $\begin{cases} y=\frac{3}{2}(x+2) \\ y=\frac{1}{2}(x-2) \end{cases}$，得 $\begin{cases} x=-4 \\ y=-3 \end{cases}$，所以 $Q(-4,-3)$，

故 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，此时 $\triangle QC_1C_2$ 的面积是 $\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.



（ii）当直线 l_2 不垂直于 x 轴时，设直线 $l_2: y=k(x+1)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq\pm 2$，$x_2\neq\pm 2$.

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \\ y=k(x+1) \end{cases}$，得 $(4k^2+3)x^2+8k^2x+(4k^2-12)=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$.

直线 MB_1 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 MB_2 的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

由 $\begin{cases} y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2) \\ y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2) \end{cases}$，得 $x=2\left[\frac{y_2(x_1+2)+y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)-y_1(x_2-2)}\right]$

$=2\left[\frac{k(x_2+1)(x_1+2)+k(x_1+1)(x_2-2)}{k(x_2+1)(x_1+2)-k(x_1+1)(x_2-2)}\right]=\frac{4x_1x_2-2x_1+6x_2}{3x_1+x_2+4}$.

下证：$\frac{4x_1x_2-2x_1+6x_2}{3x_1+x_2+4}=-4$.

即证 $4x_1x_2-2x_1+6x_2=-4(3x_1+x_2+4)$，即证 $4x_1x_2=-10(x_1+x_2)-16$，

即证 $4\left(\frac{4k^2-12}{4k^2+3}\right)=-10\left(\frac{-8k^2}{4k^2+3}\right)-16$，

即证 $4(4k^2-12)=-10(-8k^2)-16(4k^2+3)$，

上式显然成立，

故点 Q 在直线 $x=-4$，所以 Q 到 C_1C_2 的距离 $d=4$，

此时$\triangle QC_1C_2$的面积是定值，为$\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.（8分）

由（i）（ii）可知，$\triangle QC_1C_2$的面积为定值.

解法四：结论③正确.下证：$\triangle QC_1C_2$的面积是定值.

由题意得，$B_1(-2,0)$，$B_2(2,0)$，$C_1(0,-1)$，$C_2(0,1)$，且直线l_2的斜率不为0，

可设直线$l_2:x=my-1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，且$x_1\neq\pm 2$，$x_2\neq\pm 2$.

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ x=my-1\end{cases}$，得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

所以$y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$.

直线B_1M的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线B_2N的方程为：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

因为$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，所以$\frac{y_2}{x_2-2}=-\frac{3}{4}\left(\frac{x_2+2}{y_2}\right)$，（10分）

故直线B_2N的方程为：$y=-\frac{3}{4}\left(\frac{x_2+2}{y_2}\right)(x-2)$.

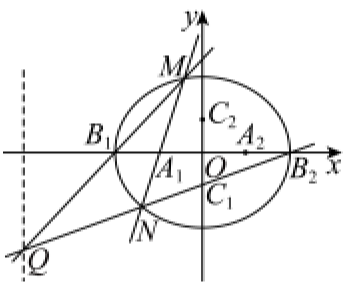
由$\begin{cases}y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)\\ y=-\frac{3}{4}\left(\frac{x_2+2}{y_2}\right)(x-2)\end{cases}$，得$\frac{x-2}{x+2}=-\frac{4y_1y_2}{3(x_1+2)(x_2+2)}$

$=-\frac{4y_1y_2}{3(mx_1+1)(my_2+1)}=-\frac{4}{3}\left[\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1}\right]=-\frac{4}{3}\left[\frac{-9}{-9m^2+6m^2+(3m^2+4)}\right]=3$，

解得$x=-4$.

故点Q在直线$x=-4$，所以Q到C_1C_2的距离$d=4$，

因此$\triangle QC_1C_2$的面积是定值，为$\frac{1}{2}|C_1C_2|\cdot d=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$.（12分）



22.（10分）

【详解】（1）因为曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=4\cos\alpha\\y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$为参数），

所以$\begin{cases}\dfrac{x}{4}=\cos\alpha\\\dfrac{y}{2}=\sin\alpha\end{cases}$，又$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以曲线$C_1$的普通方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$，

又曲线C_2的极坐标方程为$\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta-4=0$，由$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，

所以曲线C_2的直角坐标方程为$x+2y-4=0$，

由$\begin{cases}x+2y-4=0\\\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=4\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}$，所以$|AB|=\sqrt{(4-0)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$.（5分）

（2）又$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，所以$\dfrac{(\rho\cos\theta)^2}{16}+\dfrac{(\rho\sin\theta)^2}{4}=1$，

所以$\rho=\dfrac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$，即曲线$C_1$的极坐标方程为$\rho=\dfrac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$，

因为$OM\perp ON$，所以设$M(\rho_1,\theta_1)$，$N\left(\rho_2,\theta_1+\dfrac{\pi}{2}\right)$，（6分）

所以$|OM|\cdot|ON|=\dfrac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\theta_1}}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{1+3\sin^2\left(\theta_1+\dfrac{\pi}{2}\right)}}$

$=\dfrac{16}{\sqrt{(1+3\sin^2\theta_1)(1+3\cos^2\theta_1)}}$

$=\dfrac{16}{\sqrt{4+9\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1}}$

$=\dfrac{16}{\sqrt{4+\dfrac{9}{4}\sin^2 2\theta_1}}$，（8分）

所以当$\sin^2 2\theta_1=1$时$|OM|\cdot|ON|$取得最小值$\dfrac{32}{5}$，

当$\sin^2 2\theta_1=0$时$|OM|\cdot|ON|$取得最大值8，

所以$|OM|\cdot|ON|$的取值范围为$\left[\dfrac{32}{5},8\right]$.（10分）

23.（10分）

【详解】(1) 由基本不等式可得 $2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{2}{\sqrt{ab}}$，可得 $ab\geq1$，

当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立.

又由 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，得 $a+b=2ab$，

所以 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}=\frac{2ab+2}{3ab+1}=\frac{2}{3}+\frac{4}{9ab+3}\leq1$，当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立.

故原不等式得证.（5 分）

(2) 要证 $3ab+\frac{8}{a+b}\leq5+a^2+b^2$，即证 $5ab+\frac{4}{ab}\leq5+(a+b)^2$，

即证 $5ab+\frac{4}{ab}\leq5+4a^2b^2$，

令 $t=ab\geq1$，即证 $5t+\frac{4}{t}\leq5+4t^2$，

因为 $5+4t^2-5t-\frac{4}{t}=\frac{4(t^3-1)}{t}-5(t-1)=\frac{(t-1)(4t^2-t+4)}{t}$，且 $t-1\geq0$，$4t^2-t+4=4\left(t-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{63}{16}>0$，

故 $5+4t^2-5t-\frac{4}{t}\geq0$，即原不等式得证.（10 分）

西安正大补习学校

西安正大补习学校